ANNEXE E – PISTES D'EXPLORATION

Cette annexe comprend des suggestions de situations ou de figures qui permettent à l'élève d'explorer, d'observer, de déduire des mesures et de conjecturer (valider ou invalider) ainsi que des énoncés qui peuvent être utilisés dans une preuve ou une démonstration. Ces pistes d'exploration ne constituent pas un contenu de formation prescrit dans sa totalité. Elles visent à favoriser la création de situations d'apprentissage ainsi que le développement et l'exercice des compétences mathématiques.

Pistes d'exploration – Première année du cycle

Arithmétique et algèbre

- Deux fonctions polynomiales de degré 0 ou 1 se représentent par des droites parallèles si et seulement si leur taux de variation est identique.
- Lorsqu'on vide un réservoir cylindrique à débit constant, la relation entre le niveau d'eau et le volume est proportionnelle et correspond à une fonction du premier degré.
- Les expressions $(x + y)^2$ et $\frac{(4x^3 + 8x^2 + 4xy^2)}{4x}$ sont toujours équivalentes.
- Lorsqu'on considère un temps fixe alloué pour des travaux, la relation entre le nombre de personnes assignées aux tâches et le temps à investir par chacune d'elles correspond à une fonction rationnelle.
- Il y a autant de nombres dans l'intervalle [5, 8] que dans l'intervalle [5, 10].

Géométrie

- Dans des solides semblables, le rapport entre les volumes est égal au cube du rapport de similitude.
- Dans des solides semblables, le rapport entre les aires des faces homologues est égal au carré du rapport de similitude.
- Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse égale la somme des carrés des mesures des autres côtés.
- Si un triangle est tel que le carré de la mesure d'un côté est égal à la somme des carrés des mesures des autres, alors il est rectangle.

Probabilités et statistique

- La probabilité d'obtenir GFFGFG est plus grande que celle d'obtenir GGGGFG lorsqu'on enregistre des naissances dans un hôpital. (G : garçon, F : fille). (Représentativité : croire qu'une séquence a plus de chances de se réaliser, car elle est plus représentative de la population.)
- Il existe plus de façons de former des équipes distinctes de 3 personnes que de 9 personnes dans un groupe de 12 personnes. (Disponibilité : croire que, si l'événement vient plus facilement à l'esprit, il a plus de chances de se réaliser.)
- Si on lance deux dés simultanément, « obtenir 5 et 6 » est équiprobable à « obtenir 6 et 6 ». (Équiprobabilité : associer une même probabilité à deux événements non équiprobables.)
- Obtenir 2 faces sur 3 en lançant des pièces de monnaie est équiprobable à obtenir 4 faces sur 6 ou 20 faces sur 30. (Confusion entre probabilité et proportion.)

Pistes d'exploration – *Séquence Culture, société et technique*

La mathématique n'est pas une science déductive – c'est un cliché. Si vous voulez prouver un théorème, vous ne vous contentez pas de poser des hypothèses avant de commencer à raisonner; vous faites des essais et des erreurs, vous expérimentez, vous conjecturez.

Paul R. Halmos

Cette annexe comprend des suggestions de familles de figures ou des situations à explorer liées aux concepts et aux processus de la séquence *Culture, société et technique*. Elles permettent à l'élève d'émettre et de valider des conjectures. Les énoncés suggérés, dont certains sont faux, peuvent être observés, démontrés ou utilisés pour créer des situations d'apprentissage, déduire certaines mesures ou justifier les étapes d'une démarche de preuve ou de résolution d'une situation-problème. Ces explorations sollicitent notamment le raisonnement proportionnel, le sens spatial et les propriétés des transformations géométriques et peuvent être réalisées avec ou sans soutien technologique. De plus, on trouve, à la page 129, une illustration de différentes procédures de vote.

Relations et fonctions

– Toutes les réciproques de fonctions sont des fonctions.
– Toutes les fonctions sont des relations et toutes les relations sont des fonctions.

Triangles et triangles rectangles

– La médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.
– Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.
– Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.
– Les mesures des côtés d'un triangle quelconque ABC étant proportionnelles au sinus des angles opposés à ces côtés, on a $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (loi des sinus).
– L'aire S d'un triangle dont les côtés ont pour mesures a, b, et c est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où p est le demi-périmètre du triangle (formule de Héron).

Triangles isométriques

– Deux triangles qui ont leurs côtés homologues isométriques sont isométriques.
– Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques.
– Deux triangles qui ont un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont isométriques.

Figures et triangles semblables

– Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.
– Le segment de droite qui joint le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure correspond à la moitié du troisième côté.
– Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième côté forme un petit triangle semblable au grand.
– Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables.
– Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables.
– Deux triangles possédant un angle isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables.

Positions relatives de deux droites dans le plan cartésien

- Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si leurs pentes sont égales.
- Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si et seulement si leurs pentes sont inverses et de signes contraires.

Distance et point milieu dans différentes situations

- Les milieux des côtés de tout quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme.
- Le segment joignant les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et sa mesure égale la demi-somme des mesures des bases.
- Les segments joignant les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère et le segment joignant les milieux des diagonales concourent en un point qui est le milieu de chacun de ces segments.

Relations dans un triangle rectangle si on abaisse la hauteur issue du sommet de l'angle droit

- Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.
- Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

Degrés d'un graphe et relations entre degrés et arêtes

- Dans tout polyèdre simple ou graphe planaire, la somme du nombre de sommets et du nombre de faces est égale au nombre d'arêtes plus 2.
- La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe.
- La somme des degrés des sommets d'un graphe est un nombre pair.
- Un graphe comporte un nombre pair de sommets qui sont de degré impair.
- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.
- Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $r + 1$, où r est le plus grand degré de ses sommets.

Périmètres et aires de figures équivalentes

- De tous les polygones équivalents à n côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.
- De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre.)

Aires et volumes de solides équivalents

- De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume.
- De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume.
- De tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.
- De tous les solides de même volume, c'est la boule qui a la plus petite aire totale.

Exemple

On désire déterminer lequel des trois menus suivants est préféré par les 600 élèves. Pour ce faire, on demande à chaque élève d'indiquer sa préférence pour chacun des menus. Par exemple, 240 élèves ont placé le menu C en première position, le menu A, en deuxième, et le menu B est leur troisième choix. Le tableau ci-contre résume les votes obtenus selon les préférences exprimées (C-A-B, B-A-C ou A-B-C). Ci-dessous, on retrouve une illustration du résultat obtenu selon la procédure choisie.

Nombre d'élèves	240	160	200
1er choix	Menu C	Menu B	Menu A
2e choix	Menu A	Menu A	Menu B
3e choix	Menu B	Menu C	Menu C

Procédures de vote	Définitions	Illustration pour une procédure
Scrutin à la majorité	Le gagnant est celui qui remporte plus de la moitié des votes.	Dans l'exemple ci-dessus, aucun menu ne l'emporte.
Scrutin à la pluralité	Le gagnant est celui qui a obtenu le plus grand nombre de votes.	Dans l'exemple ci-dessus, c'est le menu C qui l'emporte.
Méthode de Borda	Procédure avec plusieurs candidats où des points sont attribués à chacun des candidats, indiquant ainsi les préférences du votant (ex. s'il y a 4 candidats, 3 points sont attribués au candidat préféré, 2 points au suivant, etc., et 0 point au dernier). (Des variantes existent, par exemple si les *ex æquo* sont permis.) Le « gagnant » est celui qui obtient le plus grand nombre de points.	Dans l'exemple ci-dessus, c'est le menu A qui l'emporte.
Critère de Condorcet	En analysant des résultats obtenus, un gagnant à une élection serait celui qui a défait les autres candidats dans une confrontation un à un.	Dans l'exemple ci-dessus, c'est le menu A qui l'emporte selon le critère de Condorcet.
Vote par élimination	Au cours de la première étape, on compte les votes de première place pour chaque candidat et on élimine celui qui détient le moins de votes. La deuxième étape consiste à éliminer ce candidat de l'ensemble du tableau de préférences, à attribuer au candidat qui le suit les votes qu'il avait obtenus et à recompter les votes de première place. Si un candidat a la majorité, il remporte l'élection. Sinon, on élimine celui qui détient le moins de votes et on recommence la procédure.	Dans l'exemple ci-dessus, au premier tour, on élimine le menu B. Au deuxième tour, le menu C détient toujours 240 votes et le menu A, 360 votes (160 + 200). C'est donc le menu A qui l'emporte.
Vote par assentiment	Procédure consistant à voter une seule fois pour autant de candidats de son choix. Le gagnant est celui qui obtient le plus grand nombre de votes.	
Répartition proportionnelle	Une représentation à peu près équivalente au nombre de votes obtenu est assurée. Plusieurs méthodes existent : scrutin de liste, vote unique transférable, méthode mixte, etc.	

Pistes d'exploration – Séquence *Technico-sciences*

Le travail mathématique ne consiste pas à cheminer le long de l'étroit sentier de la logique, menant d'une vérité à une autre vérité, puis à une autre encore : il revient plutôt à avancer bravement, parfois à l'aveuglette, le long d'une voie tortueuse, traversant un marécage de propositions douteuses qui ne sont jamais ni simplement et totalement vraies, ni simplement et totalement fausses.
Seymour Papert

Cette annexe comprend des suggestions de situations, de figures ou d'instruments qui permettent à l'élève d'explorer, d'observer, de déduire des mesures et de conjecturer (valider ou invalider) ainsi que des énoncés à utiliser dans une preuve ou une démonstration. Ces pistes d'exploration ne constituent pas un contenu de formation prescrit dans sa totalité. Elles visent à favoriser la création de situations d'apprentissage ainsi que le développement et l'exercice des compétences mathématiques.

Arithmétique ou algèbre

– Un minimum de deux équations est nécessaire pour résoudre un système d'équations du premier degré impliquant deux variables et un minimum de n équations, pour résoudre un système à n variables.
– Toutes les réciproques de fonctions sont des fonctions.
– Toutes les fonctions sont des relations et toutes les relations sont des fonctions.
– Dans la résolution de systèmes d'inéquations, la solution optimale se trouve toujours sur un sommet du polygone de contraintes.
– Dans la résolution de systèmes d'inéquations, la valeur minimale correspond au sommet le plus bas et la valeur maximale, au sommet le plus haut du polygone de contraintes.
– La relation unissant le n^e terme d'une suite et la somme des n premiers termes de cette suite correspond à une fonction polynomiale de degré 2 (Gauss, $\frac{n(n+1)}{2}$).
– Soit deux fonctions : $f(x) = a_1x^2$ et $g(x) = a_2(bx)^2$ et $b > 1$. Soit $P_1(x_1, y_1)$, point appartenant à $g(x)$ et $P_0(x_0,y_0)$, point appartenant à $f(x)$ tel que P_1 est l'image de P_0 après une transformation de $f(x)$. Alors, les coordonnées de P_1 correspondent aux coordonnées du point de partage situé à $\frac{1}{b}$ du segment reliant P_0 à l'axe des ordonnées : $P_1\left(\frac{1}{b}x_0, y_0\right)$. Cet énoncé est-il vrai? Peut-il être vrai lorsque $b < 1$?

Probabilités et statistique

– Le calcul de probabilités conditionnelles s'applique uniquement dans des situations où les événements sont dépendants.
– Il existe un lien entre le calcul d'une moyenne pondérée et le calcul de l'espérance mathématique.
– L'espérance mathématique permet d'établir l'espérance de vie.
– Toutes les méthodes d'échantillonnage en statistique recourent à des procédés aléatoires.
– Il est possible qu'un échantillon de seulement cinq données soit représentatif d'une population.
– Les prévisions météorologiques sont émises à partir de probabilités subjectives.

Géométrie

- Deux triangles qui ont leurs côtés homologues isométriques sont isométriques.
- Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques.
- Deux triangles qui ont un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont isométriques.
- Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.
- Le segment qui joint le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure est la moitié du troisième côté.
- Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables.
- Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables.
- Deux triangles possédant un angle isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables.
- Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.
- Deux droites, non parallèles à l'axe des ordonnées, sont perpendiculaires si et seulement si leurs pentes sont inverses et de signes contraires.
- Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.
- Il est possible d'obtenir une expression découlant des rapports trigonométriques sinus ou cosinus du triangle rectangle et applicable dans un triangle quelconque (lois des sinus et des cosinus).
- Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.
- Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.
- Tout diamètre perpendiculaire à une corde partage cette corde et chacun des arcs qu'elle sous-tend en deux parties isométriques.
- Un angle inscrit a pour mesure la moitié de celle de l'arc compris entre ses côtés.
- Toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente au cercle et réciproquement.
- Dans un même cercle ou dans deux cercles isométriques, deux cordes isométriques sont à la même distance du centre, et réciproquement.
- Deux parallèles sécantes ou une tangente à un cercle interceptent sur le cercle deux arcs isométriques.
- Si, d'un point P extérieur à un cercle de centre O, on mène deux tangentes aux points A et B du cercle, alors OP est la bissectrice de l'angle APB et $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.
- L'angle dont le sommet est entre le cercle et le centre a pour mesure la demi-somme des mesures des arcs compris entre ses côtés prolongés.
- L'angle dont le sommet est à l'extérieur du cercle a pour mesure la demi-différence des mesures des arcs compris entre ses côtés.
- Lorsque deux cordes se coupent dans un cercle, le produit des mesures des segments de l'une égale le produit des mesures des segments de l'autre.
- Si, d'un point P extérieur à un cercle, on mène deux sécantes PAB et PCD, alors $m\,\overline{PA} \cdot m\,\overline{PB} = m\,\overline{PC} \cdot m\,\overline{PD}$.

Lieu

– La médiatrice d'un segment est un lieu géométrique.
– On peut construire deux droites parallèles à un segment donné en traçant le lieu des points décrit par le sommet C d'un triangle de base et d'une aire donnés.
– Le lieu correspondant aux positions possibles d'un sommet d'un triangle dont la longueur d'un côté et l'aire sont données est un cercle.
– Soit un cercle de centre O et une corde AM. Soit H la projection orthogonale de O sur la corde AM. Quel est le lieu décrit par le point H lorsque M parcourt le cercle?
– Le lieu des points, tel que les distances de chacun d'eux à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le rapport est plus petit, égal ou plus grand que l'unité (lemme de Pappus, IIIe siècle après Jésus-Christ).
– La courbe représentant le lieu des points situés à égale distance d'une droite et d'un point fixe est de même forme que la courbe du graphique d'une relation proportionnelle au carré.
– Le lieu géométrique engendré par l'application de cet algorithme est une parabole : 1) Tracer deux droites sécantes; 2) Graduer ces deux droites avec un même nombre de graduations; 3) Joindre le premier degré de l'une au dernier de l'autre, le deuxième à l'avant-dernier, le troisième à l'antépénultième (avant-avant-dernier), etc. (construction sous la forme d'une enveloppe de tangentes par Apollonius).
– Le lieu du point d'où l'on voit un segment AB sous un angle donné correspond à un cercle.

Optimisation

– De tous les polygones équivalents à *n* côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.
– De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre.)
– De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume et, parmi ceux de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.
– De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume et, parmi ceux de même volume, c'est la boule qui a la plus petite aire totale.
– Les médianes d'un triangle déterminent six triangles équivalents.

Instruments

L'étude d'instruments qui découlent de l'application de concepts mathématiques offre de belles occasions pour favoriser le développement intellectuel et faire comprendre l'utilité de cette discipline, son omniprésence dans la vie quotidienne et son impact sur la vie humaine. Elle constitue du même coup une porte d'entrée intéressante pour mieux faire connaître divers métiers et professions.

Balance à plateau, palmer, pied à coulisse et vernier, gnomon, astrolabe, horloge, pendule, haut-parleur, pulsomètre, radar, télescope (de Newton, de Mercure, de Galilée), microscope, rétroprojecteur, jumelle, stroboscope, laser, robot, sonde, odomètre, multimètre, oscilloscope, pantographe, rouet, arc, équerre, compas de charpentier, compas de navigation, alidade, altimètre, théodolite, micromètre, goniomètre, caméra, héliostat, instruments météo divers (anémomètre, échelle de Beaufort), magnétomètre, sismographe, système GPS, spectrophotomètre, boussole, galvanomètre, analyseur de combustion, antenne parabolique, phares de voiture, satellite, moniteurs de surveillance médicale, électrocardiographe, audiomètre, tensiomètre, bielle, synthétiseur, métronome, etc.

Pistes d'exploration – Séquence *Sciences naturelles*

Il est très facile de ne pas devenir intelligent, la recette est simple : s'assoupir dans la passivité des réponses apprises, renoncer à l'effort de formuler ses propres questions.
Albert Jacquard

Cette annexe comprend des suggestions de situations ou de figures qui permettent à l'élève d'explorer, d'observer, de déduire des mesures et de conjecturer (valider ou invalider) ainsi que des énoncés à utiliser dans une preuve ou une démonstration. Ces pistes d'exploration ne constituent pas un contenu de formation prescrit dans sa totalité. Elles visent à favoriser la création de situations d'apprentissage ainsi que le développement et l'exercice des compétences mathématiques.

- Un minimum de n équations est nécessaire pour résoudre un système d'équations du premier degré à n variables.
- Toutes les réciproques de fonctions sont des fonctions.
- Toutes les fonctions sont des relations et toutes les relations sont des fonctions.
- La relation unissant le n^e terme d'une suite et la somme des n premiers termes de cette suite correspond à une fonction polynomiale de degré 2. (Gauss, $\frac{n(n+1)}{2}$)
- Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure égale la moitié de celle du troisième côté.
- Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.
- Le segment joignant les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et sa mesure égale la demi-somme des mesures des bases.
- Deux triangles qui ont tous leurs côtés homologues isométriques sont isométriques.
- Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques.
- Deux triangles qui ont un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont isométriques.
- Des figures planes sont isométriques si et seulement si tous leurs côtés et tous leurs angles homologues sont isométriques.
- Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.
- Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables.
- Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables.
- Deux triangles possédant un angle isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables.
- Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.
- Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.
- Les mesures des côtés d'un triangle quelconque ABC étant proportionnelles au sinus des angles opposés à ces côtés, on a $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (loi des sinus).
- Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, moins le double du produit des longueurs des autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés (loi des cosinus).

– L'aire S d'un triangle dont les côtés ont pour mesure a, b, et c est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, où p est le demi-périmètre du triangle (formule de Héron).
– L'expression $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est toujours vraie.
– L'expression $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est vraie dans tout cercle de rayon r et pour tout nombre réel x.
– Vérification d'identités trigonométriques. Exemples :
  - $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
  - $\cos(90° - (A + B)) = \sin(A + B)$
  - $\operatorname{cosec} A(\operatorname{cosec} A - \sin A) = \cot^2 A$
  - $\sin\theta = \cos\theta\sqrt{\sec^2\theta - 1}$
  - $2\cos^2\beta - 1 = \frac{\cot\beta - \tan\beta}{\cot\beta + \tan\beta}$
  - $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha \tan^2\alpha$
  - $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$
  - $\frac{1+\sec\alpha}{\sec\alpha - 1} + \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha - 1} = 0$
  - $(1+\sec\beta)(\sec\beta - 1) = \frac{\sin\beta\sec\beta}{\cos\beta\operatorname{cosec}\beta}$
  - $\sin 2\alpha \sec\alpha = 2\sin\alpha$

– Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ des vecteurs dans le plan, et r et s, des scalaires.
  - $\left(r\vec{u} = \vec{o}\right) \Leftrightarrow \left(r = 0 \vee \vec{u} = \vec{o}\right)$
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs sont non colinéaires, alors $\left(r\vec{u} = s\vec{v}\right) \Leftrightarrow (r = s = 0)$.
  - $\left(\vec{w} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\right) \Leftrightarrow \left(\exists_1 r \in \mathbb{R} : \vec{w} = r\vec{u}\right)$
  - $\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non colinéaires}\right) \Leftrightarrow \left(\forall \vec{w}, \exists_1 r \in \mathbb{R}, \exists_1 s \in \mathbb{R} : \vec{w} = r\vec{u} + s\vec{v}\right)$
  - $\left(\vec{u} \perp \vec{v}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0\right)$

– De tous les polygones équivalents à n côtés, c'est le polygone régulier qui a le plus petit périmètre.
– De deux polygones convexes équivalents, c'est le polygone qui a le plus de côtés qui a le plus petit périmètre. (À la limite, c'est le cercle équivalent qui a le plus petit périmètre.)
– De tous les prismes rectangulaires de même aire totale, c'est le cube qui a le plus grand volume.
– De tous les solides de même aire totale, c'est la boule qui a le plus grand volume.
– De tous les prismes rectangulaires de même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire totale.
– De tous les solides de même volume, c'est la boule qui a la plus petite aire totale.