Les bases de l'Algèbre

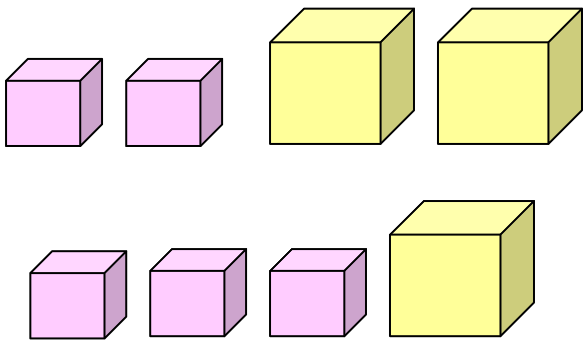
L'Addition

Tu as 2 petites boîtes et 2 grosses boîtes. Ton ami en a 3 petites et une seule grosse.

Si on fait le schéma de cette situation, voici ce que l'on obtient :

Toi :

Ton ami :

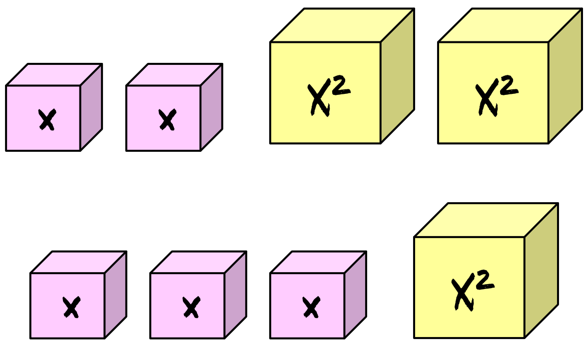


Si on veut savoir le nombre de petites et de grosses boîtes, vas-tu additionner toutes les boîtes ensemble ? Bien sûr que non… Tu vas additionner les petites boîtes ensemble et les grosses boîtes ensemble.

Imaginons maintenant que dans chaque boîte il y ait une valeur inconnue. Faisons un second schéma.

Toi :

Ton ami :



Quelle expression représente ce que tu as ? $2x^2 + 2x$
Et l'expression de ton ami ? $x^2 + 3x$

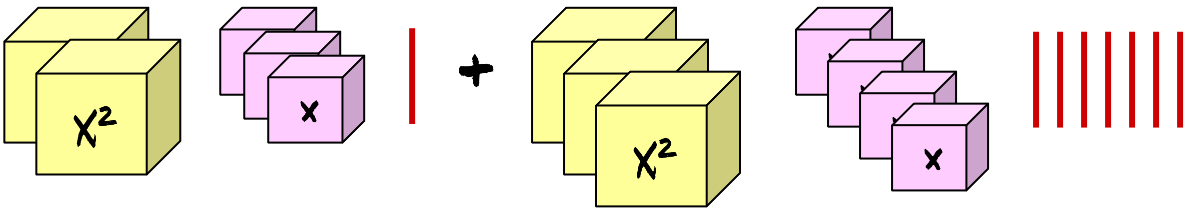
Et qu'avez-vous ensemble ? $3x^2 + 5x$

L'addition de termes algébriques est aussi simple que cet exemple qui devait te paraître bien enfantin... C'est comme additionner des boîtes ensemble et l'intérieur de ces mêmes boîtes ne change jamais... tout ce qui change c'est le nombre de boîtes.

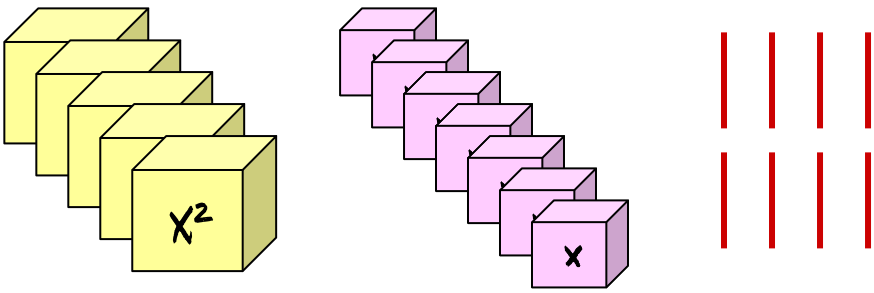
Si on fait un lien avec les termes algébriques, le nombre de boîtes correspond à votre coefficient et l'intérieur de la boîte représente les variables et leurs exposants.

Voici un exemple :

$$2x^2 + 3x + 1 + 3x^2 + 4x + 7$$



On obtient :



Donc : $5x^2 + 7x + 8$

D'autres exemples moins schématisés :

1) $2ay + 3x + 4ay + 6 + 2x + 4 = 6ay + 5x + 10$

2) $15x^2y + 10xy^2 + 5xy^2 + 12x^2y = 27x^2y + 15xy^2$

3) $(7ab^2 + 2ab + 3) + (3ab^2 + ab + 8) = 10ab^2 + 3ab + 11$

PEUT-ON ENLEVER LES PARENTHÈSES ?

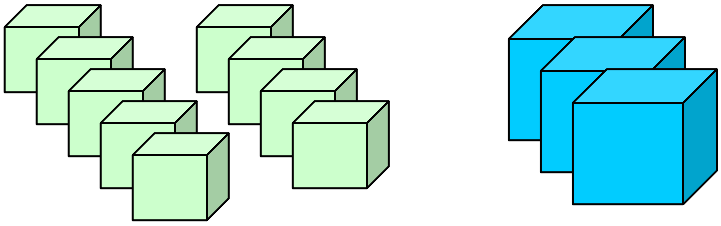
S'IL N'Y A PAS DE COEFFICIENT, QU'EST-CE QU'ON FAIT ?

La soustraction

Partons du même principe de boîtes.

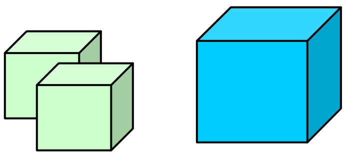
Tu as 9 petites boîtes et 3 grosses boîtes. Ton ami en a 2 petites et une seule grosse.

Toi :



$3x^2 + 9x$

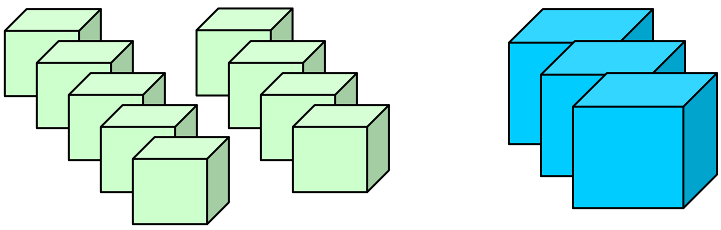
Ton ami



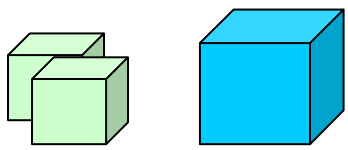
$x^2 + 2x$

Imaginons qu'on prenne ce que tu possèdes et on enlève l'équivalent d'un paquet de ton ami.

Faisons une schématisation :



moins



COMBIEN DE PETITES BOITES AU TOTAL AS-TU SOUSTRAIT ? 2

ET COMBIEN DE GROSSES BOITES ? 1

Que te restera-t-il ?

7 petites boîtes et 2 grosses boîtes : $2x^2 + 7x$

L'importance des parenthèses dans une soustraction…

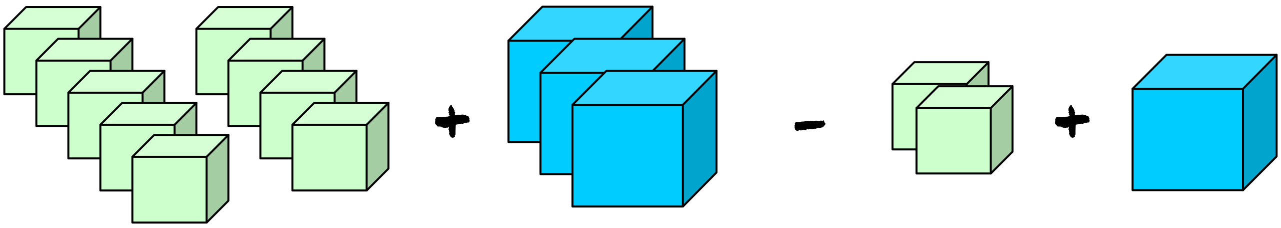
Voici comment tu pourrais représenter la soustraction que tu viens de faire :

- ✓ $3x^2 + 9x - x^2 + 2x$
- ✓ $3x^2 + 9x - (x^2 + 2x)$

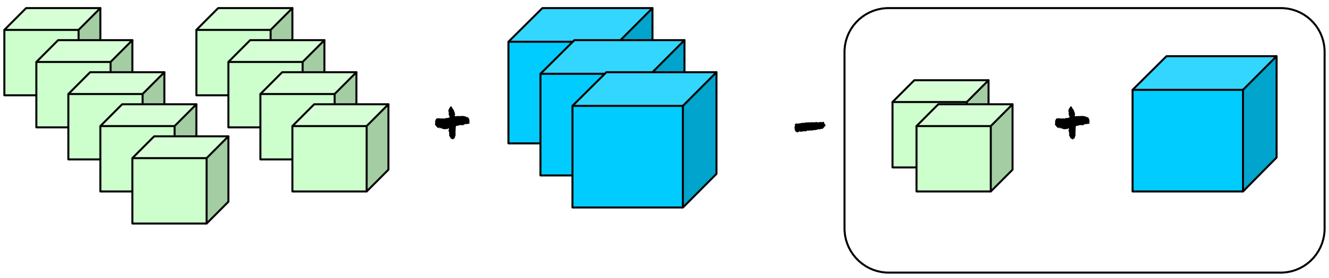
Laquelle est la bonne ?

Faisons le schéma de chacune d'entres-elles.

La première :



La seconde :



La première façon de représenter cette soustraction ne retire qu'un seul terme tandis que la deuxième façon retire les deux termes ; ce que tu veux !

En bref…

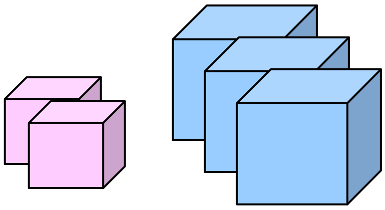
La soustraction respecte le même principe que l'addition : l'intérieur des boîtes (les variables et les exposants) ne change pas, seul le nombre de boîtes (les coefficients) est modifié.

Cependant, il ne faut pas oublier de **soustraire tous les termes** (souvent à l'intérieur de parenthèses).

La multiplication

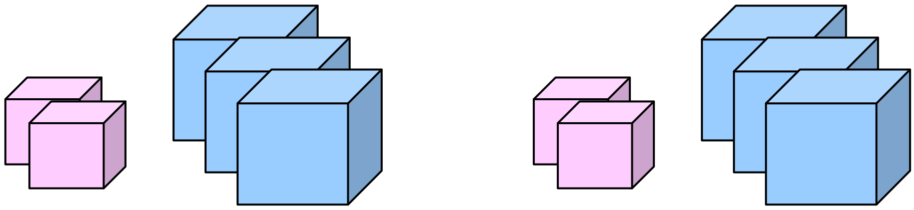
Partons toujours du même principe des boîtes…

Imaginons que tu as 2 petites boîtes et 3 grosses boîtes.



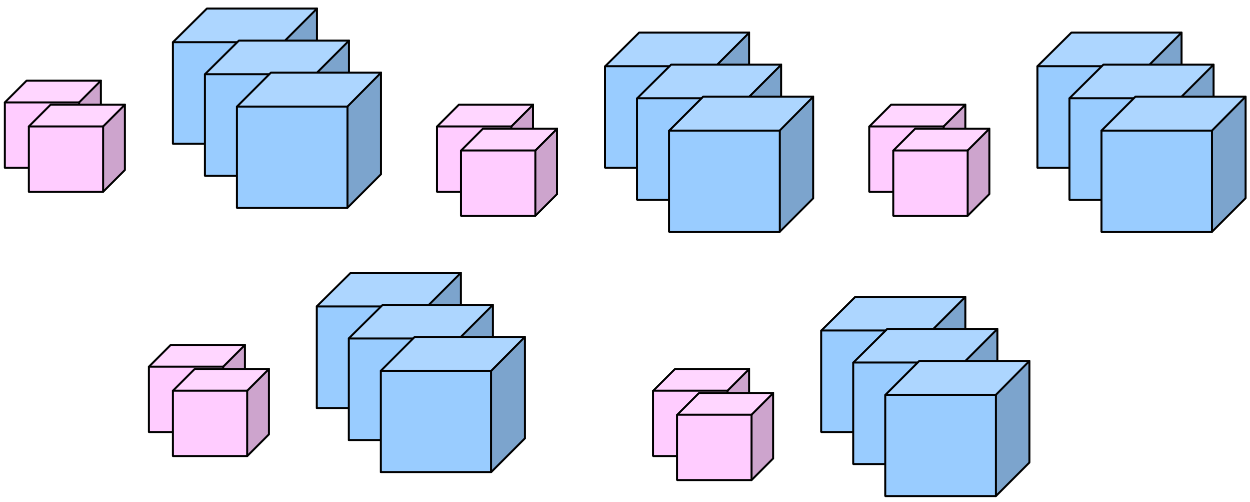
Qu'arrive-t-il si tu les multiplies par un nombre quelconque…

Par 2 :



Que remarques-tu ?   *Le nombre de petites boîtes a doublé et celui des grosses boîtes aussi.*

Par 5 :



Que remarques-tu ?   *Le nombre de petites boîtes a quintuplé et celui des grosses boîtes aussi.*

On pourrait continuer des heures et des heures...

Si on représente ton nombre de boîtes par une expression algébrique, on obtient :

$$3x^2 + 2x$$

Lorsqu'on multiplie par 2 : $6x^2 + 4x$

Et par 5 : $15x^2 + 10x$

Encore une fois, deux façons de représenter la multiplication :

- ✓ $2 \cdot 3x^2 + 2x$
- ✓ $2 \cdot (3x^2 + 2x)$

Laquelle est la bonne ? La 2e

La première façon de représenter la multiplication ne multiplie qu'un seul terme. La deuxième façon doit attribuer le 2 à tous les termes de la parenthèse.

Les lois des exposants

Avant de continuer, il est important de maîtriser une des lois des exposants : celle de la multiplication :

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Voici quelques exemples de multiplication d'un monôme par un monôme.

1) $2a \cdot 2a^2 = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a^2 = 4 \cdot a^{1+2} = 4a^3$
2) $3x \cdot 4x^5 = 12x^6$
3) $(x^3y^5)(-x^4y^6z^2) = -x^7y^{11}z^2$
4) $2a^{-1/2} \cdot 3a = 6a^{1/2}$

La multiplication d'un binôme par un monôme

Comme on a déjà vu avec l'exemple des boîtes, on doit multiplier tous les termes du binôme par le monôme.

Voici un exemple complet :

$$2xy^2\,(3x^3y^2 + 2x^2)$$

$$2xy^2 \cdot 3x^3y^2 + 2xy^2 \cdot 2x^2$$

$$6x^4y^4 + 4x^3y^2$$

La multiplication d'un binôme par un binôme

Les deux termes du binôme doivent multiplier chacun des termes de l'autre binôme.

Voici un exemple complet :

$$(2xy^2 + 4x^2y)\,(3x^3y^2 - 2x^2)$$

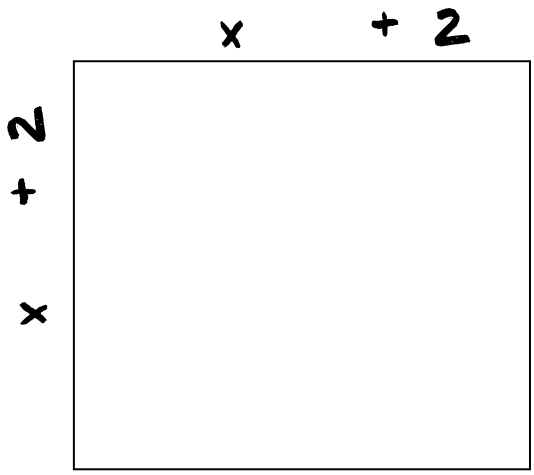
$$2xy^2 \cdot 3x^3y^2 + 2xy^2 \cdot -2x^2 + 4x^2y \cdot 3x^3y^2 + 4x^2y \cdot -2x^2$$

$$6x^4y^4 + -2x^3y^2 + 12x^5y^3 + -4x^4y$$

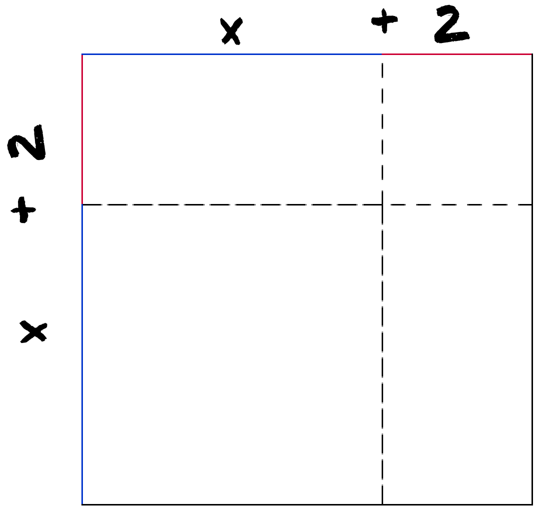
$$6x^4y^4 - 2x^3y^2 + 12x^5y^3 - 4x^4y$$

Un binôme au carré[2]

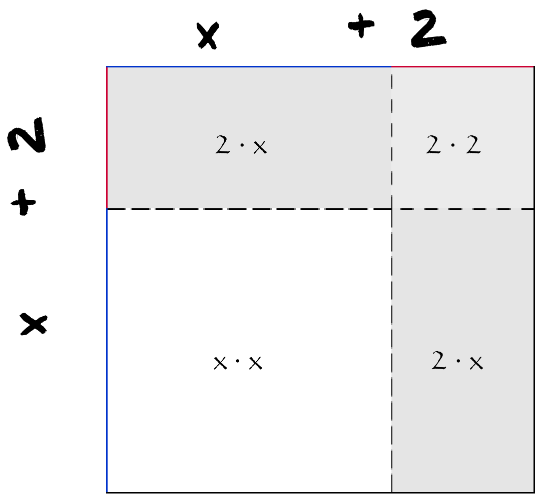
Voici une représentation schématique d'un binôme au carré.



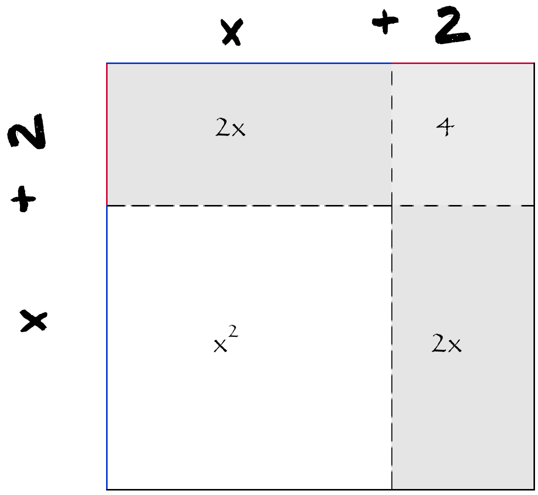
Traçons la longueur « x » et la longueur « 2 » à l'intérieur du carré afin d'obtenir des sections :



Regardons maintenant la superficie de chacune des sections obtenues.



Voici donc le résultat final de notre travail :



On obtient quatre sections : $2x + 4 + x^2 + 2x$

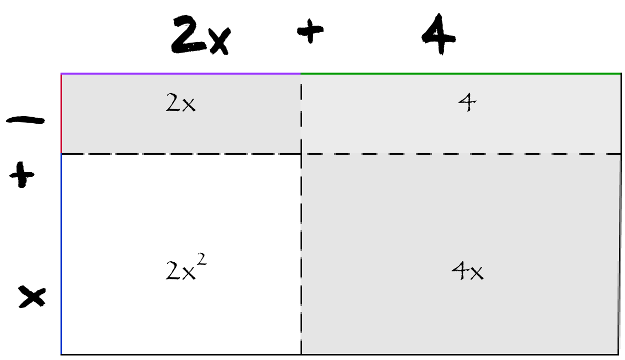
Si on réduit cette expression, voici ce qu'on obtient :

$$x^2 + 4x + 4$$

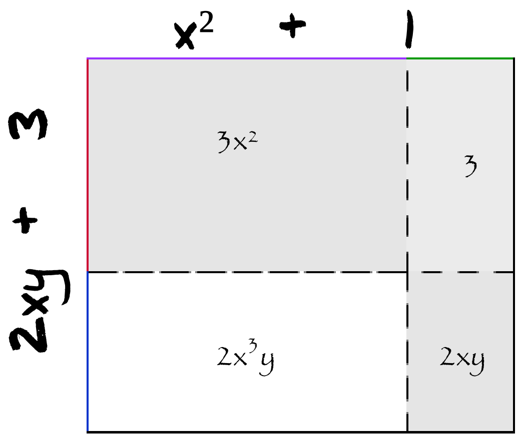
Donc : $(x + 2)^2 = (x + 2)\ (x + 2)$

$= (x^2 + 4x + 4)$

Cette façon de représenter la multiplication d'un binôme par un binôme peut s'effectuer avec n'importe quel binôme. Voici deux exemples :



$(x + 1)(2x + 4) = 2x^2 + 6x + 4$

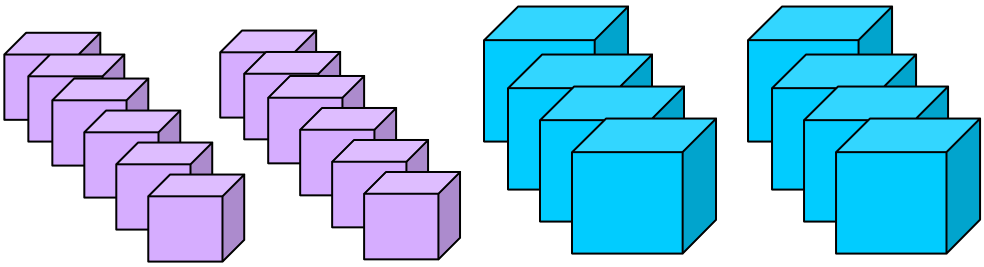


$(2xy + 3)\ (x^2 + 1) = 2x^3y + 3x^2 + 2xy + 3$

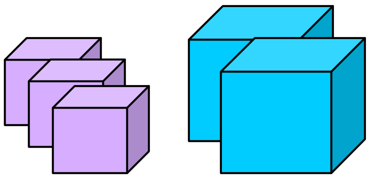
La division

Partons toujours et encore du principe de nos boîtes…

Imagine que tu as 12 petites boîtes et 8 grosses boîtes.



Tes amis arrivent à la maison et tu dois partager tes boîtes en quatre groupes…
Combien de boîtes chacun auront-ils si vous êtes 4 personnes ?



Représentons ces boîtes par nos termes algébriques.

Il est possible de le faire de deux façons différentes :

- ✓ $8x^2 + 12x \div 4$ (le « 12x » seulement est divisé en quatre en raison des priorités d'opération)
- ✓ $(8x^2 + 12x) \div 4$ (toute la parenthèse est divise en quatre)

La première façon n'est pas adéquate, la deuxième l'est.

Il s'agit du même principe pour les termes algébriques. Chacun des termes doit être divisé par le monôme.

Exemple : $\dfrac{ab^7}{a^3b^5}$ revient à faire l'opération : $ab^7 \div a^3b^5$

Les lois des exposants

Avant de continuer, il est important de maîtriser une des lois des exposants : celle de la division :

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

Voici un exemple de division :

$$4a^3 \div 2a^2 = 2a^{3-2} = 2a$$

Mais d'où ça vient !?

Prenons la division suivante : $$\frac{2^3 \cdot x^4 y^2}{2x^3 y^5}$$

On sait que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ et à l'inverse que $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Donc, si on décompose notre division, on obtient ceci :

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y}{2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}$$

On élimine donc tout ce qui est possible pour obtenir le résultat suivant :

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot x}{y \cdot y \cdot y}$$

Si on réduit : $\boxed{\dfrac{2^2 x}{y^3}}$ On se rend alors compte qu'on a soustrait les exposants de chacune des variables.